BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** **2008**

О ДЕФЕКТНОЙ БАЗИСНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_p СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

З.С.АЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет

В работе рассматривается спектральная задача

$$y^{(4)}(x)-\left(q(x)y'(x)\right)' = \lambda y(x),\ x\in(0,l),$$
$$y(0)=y'(0)=y''(l)=0,$$
$$Ty(l)=(a\lambda+b)y(l),$$

где λ *- спектральный параметр,* q *- абсолютно непрерывная положительная на отрезке* $[0,l]$ *функция,* $Ty\equiv y'''-qy'$, a,b*- действительные постоянные, причем* $a>0$.

Исследуются базисные свойства в пространстве $L_p(0,l)$, $1<p<\infty$, *системы корневых функций этой задачи.*

Рассмотрим спектральную задачу

$$y^{(4)}(x)-\left(q(x)y'(x)\right)' = \lambda y(x),\quad x\in(0,l), \tag{1}$$
$$y(0)=y'(0)=y''(l)=0, \tag{2}$$
$$Ty(l)=(a\lambda+b)y(l), \tag{3}$$

где λ -спектральный параметр, q - абсолютно непрерывная, положительная на отрезке $[0,l]$ функция, $Ty\equiv y'''-qy'$, a,b -действительные постоянные, причем $a\neq 0$.

Как известно (см., напр., [1,2]), спектральная задача для обыкновенного дифференциального оператора со спектральным параметром, полиноминально входящим в граничные условия, стандартным образом сводится к спектральной задаче для линейного оператора в подходящем пространстве. В частности, рассматриваемая задача (1)-(3) сводится к задаче на собственные значения для линейного оператора L в гильбертовом пространстве $H=L_2(0,l)\oplus\mathbb{C}$ со скалярным произведением $(\hat{y},\hat{u})_H=(\{y,\alpha\},\{u,\beta\})_H=\ (y,u)_{L_2}+\frac{1}{|a|}\alpha\overline{\beta}$, где $(\cdot,\cdot)_{L_2}$ - скалярное произведение в $L_2(0,l)$, $L\hat{y}=L\{y,\alpha\}=\ \left\{(Ty)'(x),Ty(l)-by(l)\right\}$, с областью определения $D(L)=\{\{y(x),\alpha\}\in H: y\in W_2^4(0,l),\ \ (Ty)'(x)\in L_2(0,l), y(0)=y'(0)=y''(l)=0,$ $\alpha=ay(l)\}$, которая всюду плотна в H (см.[1]). Таким образом, задача на собственные значения

$$L\hat{y}=\lambda\hat{y},\quad \hat{y}\in D(L), \tag{4}$$

адекватна спектральной задаче (1)-(3): спектры оператора L и задачи (1)-(3) совпадают вместе с их кратностями; между элементами цепочки собственного и присоединенных векторов оператора L и элементами цепочки из собственного и присоединенных функций задачи (1)-(3), отвечающих одному и тому же собственному значению, можно установить взаимно однозначное соответствие (при этом первые компоненты цепочки из собственного и присоединенных векторов оператора L образуют цепочку из собственного и присоединенных функций задачи (1)-(3)).

В случае $a<0$ L будет самосопряженным, дискретным, полуограниченным снизу оператором в H и значит обладает системой собственных векторов $\{y_n(x),\alpha_n\}$, $n\in N$, которая образует ортогональный базис в H, где $y_n(x)$ - собственные функции задачи (1)-(3) и $\alpha_n=ay_n(l)$. А система $\{y_n(x)\}$ образует базис с дефектом 1 в пространстве $L_p(0,l)$, $1<p<\infty$, т.е. эта система после удаления одной функции образует базис в $L_p(0,l)$, $1<p<\infty$ [3].

В случае $a>0$ L - несамосопряженный, замкнутый оператор в H с компактной резольвентой. Определим оператор $J:H\to H$ следующим образом: $J\{y,\alpha\}=\{y,-\alpha\}$. Оператор J является унитарным и симметричным в H, со спектром, состоящим из двух собственных значений: - 1 с кратностью 1;$+1$ с бесконечной кратностью. Следовательно, этот оператор порождает пространство Понтрягина $\Pi_1=L_2(0,l)\oplus\mathbb{C}$ с внутренним произведением (J-метрикой)

$$(\hat{y},\hat{u})_{\Pi_1}=(\{y,\alpha\},\{u,\beta\})_{\Pi_1}=(y,u)_{L_2}-\frac{1}{a}\alpha\overline{\beta}. \tag{5}$$

Оператор L является J - самосопряженным в пространстве Π_1 (см. [4,5]).

Пользуясь результатами работы [6] можно доказать, что система собственных и присоединенных векторов оператора L образует базис Рисса в пространстве H.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $a>0$.

В работе [7] приведена общая характеристика расположения собственных значений на комплексной плоскости, изучена структура корневых подпространств, исследованы осцилляционные свойства собственных функций и получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций задачи (1)-(3).

Настоящая работа является продолжением работы [7] и посвящена исследованию базисных свойств в пространстве $L_p(0,l)$, $1<p<\infty$, системы корневых функций спектральной задачи (1)-(3).

При каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ существует единственное, с точностью до постоянного множителя, нетривиальное решение $y(x,\lambda)$ задачи (1), (2). Не нарушая общности, решение $y(x,\lambda)$ задачи (1), (2) для каждого фиксированного $x \in [0,l]$ можно считать целой функцией параметра λ [3; теорема 2.1, замечание 2.1].

Введем краевое условие

$$y(l)\cos\delta - Ty(l)\sin\delta = 0, \quad \delta \in [0,\pi/2]. \tag{3^1}$$

Собственные значения краевой задачи (1), (2), (3^1) являются простыми и образуют бесконечно возрастающую последовательность $\{\mu_n(\delta)\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $0 < \mu_1(\delta) < \ldots < \mu_n(\delta) < \ldots$. Собственная функция $\vartheta_n^{(\delta)}(x)$, соответствующая собственному значению $\mu_n(\delta)$, имеет n–1 простых нулей в интервале $(0,l)$ [8].

Обозначим: $D_n = (\mu_{n-1}(0), \mu_n(0))$, $n = 1,2,\ldots$, где $\mu_0(0) = -\infty$.

Очевидно, что собственные значения $\mu_n(0)$ и $\mu_n(\pi/2)$, $n \in \mathbb{N}$, краевой задачи (1), (2), (3^1) являются нулями целых функций $y(l,\lambda)$ и $Ty(l,\lambda)$, соответственно. Заметим, что функция $F(\lambda) \equiv Ty(l,\lambda)/\, y(l,\lambda)$ определена для значений $\lambda \in D = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ и является мероморфной функцией конечного порядка, собственные значения $\mu_n(\pi/2)$ и $\mu_n(0)$, $n \in \mathbb{N}$, краевой задачи (1), (2), (3^1) являются нулями и полюсами этой функции, соответственно.

Лемма 1 (см. [3; §3, теорема 3.1]). *Пусть $\lambda \in D$. Тогда имеет место равенство*

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \left(\int_0^l y^2(x,\lambda)dx\right) / \, y^2(l,\lambda). \tag{6}$$

Заметим, что собственные значения задачи (1)-(3) являются корнями уравнения

$$F(\lambda) = a\lambda + b\,. \tag{7}$$

Теорема 1 [7; теорема 2.1]. Имеет место одно из следующих утверждений:

(i) все собственные значения задачи (1)-(3) вещественны, при этом D_1 содержит алгебраически два (либо два простых, либо одно двукратное) собственных значения, а D_n, $n = 2,3,\ldots$, содержит одно простое собственное значение;

(ii) все собственные значения задачи (1)-(3) вещественны, при этом D_1 не содержит собственные значения, в то же время существует натуральное число n_0 $(n_0 \geq 2)$ такое, что D_{n_0} содержит алгебраически три (либо три простых, либо одно простое и одно двукратное, либо одно трехкратное) собственных значения, а D_n, $n = 2,3,\ldots, n \neq n_0$, содержит одно простое собственное значение;

(iii) задача (1)-(3) имеет одну пару сопряженных комплексных собственных значений, при этом D_1 не содержит собственные значения, а D_n, $n=2,3,\ldots$, содержит одно простое собственное значение.

Пусть r - произвольное фиксированное натуральное число.

Рассмотрим три случая.

Случай 1. Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ задачи (1)-(3) являются простыми.

Рассмотрим следующую систему собственных функций

(A_1) $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots, n \neq r$.

Случай 2. Задача (1)-(3) имеет двукратное собственное значение λ_k ($k=1$ если имеет место утверждение (i) теоремы 1, либо $k=n_0-1$, либо $k=n_0$ если имеет место утверждение (ii) теоремы 1). Тогда $y_k(x)=y(x,\lambda_k)$, $y_k^{[1]}(x)=\dfrac{\partial}{\partial\lambda}y(x,\lambda_k)$ образуют цепочку собственной и присоединенной функций.

Обозначим:

$$a_k = y_k(l)\| y_k^{[1]} \|_2^2 - y_k^{[1]}(l)\left(y_k^{[1]}, y_k\right)_{L_2},\ b_k = y_k^{[1]}(l)\| y_k\|_2^2 - y_k(l)\left(y_k^{[1]}, y_k\right)_{L_2},$$

где $\|\cdot\|_p$ означает норму в $L_p(0,l)$. Из (6) получим

$$F''(\lambda)=\frac{2}{y^3(l,\lambda)}\left\{y(l,\lambda)\int_0^l y(x,\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}y(x,\lambda)dx - \right.$$
$$\left. -\frac{\partial}{\partial\lambda}y(l,\lambda)\int_0^l y^2(x,\lambda)dx\right\}, \tag{8}$$

откуда следует, что $b_k=\dfrac{1}{2}y_k^3(l)F''(\lambda_k)$. В силу (1.15) из [7] имеем $F''(\lambda_k)\neq 0$. Следовательно, $b_k\neq 0$.

Рассмотрим следующие системы корневых функций:

(A_2^1) $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots;$

(A_2^2) $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{k-1}(x), y_k^{[1]}(x)+cy_k(x),\ y_{k+1}(x)\ldots, y_n(x), \ldots, c\neq \dfrac{a_k}{b_k}$;

(A_2^3) $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{k-1}(x), y_k(x), y_k^{[1]}(x)+cy_k(x), y_{k+1}(x), \ldots, y_n(x), \ldots, n\neq r;\ r\neq k$;

Случай 3. Задача (1)-(3)имеет трехкратное собственное значение λ_k $(k=n_0-1)$. Напомним, что собственному значению λ_k соответствует цепочка собственной и присоединенных функций

$$y_k(x)=y(x,\lambda_k),\ y_k^{[1]}(x)=\frac{\partial y(x,\lambda_k)}{\partial\lambda},\ y_k^{[2]}(x)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 y(x,\lambda_k)}{\partial\lambda^2}.$$

Обозначим: $\widetilde{\alpha}_k = y_k^{[1]}(l)\left(y_k^{[2]}, y_k\right)_{L_2} - y_k(l)\left(y_k^{[2]}, y_k^{[1]}\right)_{L_2}$, $\beta_k = \left(y_k^{[2]}, y_k\right)_{L_2} - a y_k^{[2]}(l) y_k(l)$,

$\gamma_k = \left(y_k^{[2]}, y_k^{[1]}\right) - a y_k^{[2]}(l) y_k^{[1]}(l)$, $\delta_k = \left\| y_k^{[2]} \right\|^2 - a\left(y_k^{[2]}(l)\right)^2$,

$\tau_k = \gamma_k y_k^{[1]}(l) - \beta_k y_k^{[2]}(l)$,

$\sigma_k = \gamma_k y_k^{[2]}(l) - \delta_k y_k^{[1]}(l)$, $\quad \theta_k = \beta_k y_k^{[2]}(l) - \delta_k y_k(l)$, $\nu_k = \beta_k \theta_k - \alpha_k \gamma_k$,

В силу (4) имеем

$$L\left\{y_k^{[1]}, \alpha_k^{[1]}\right\} = \lambda_k \left\{y_k^{[1]}, \alpha_k^{[1]}\right\} + \left\{y_k, \alpha_k\right\}, \tag{9}$$

$$L\left\{y_k^{[2]}, \alpha_k^{[2]}\right\} = \lambda_k \left\{y_k^{[2]}, \alpha_k^{[2]}\right\} + \left\{y_k^{[1]}, \alpha_k^{[1]}\right\}, \tag{10}$$

где $\alpha_k = a y_k(e)$, $\alpha_k^{[1]} = a y_k^{[1]}(l)$, $\alpha_k^{[2]} = a y_k^{[2]}(l)$. Умножая скалярно в Π_1 обе части равенства (9) на $\left\{y_k^{[2]}, \alpha_k^{[2]}\right\}$, а обе части равенства (10) на $\left\{y_k^{[1]}, \alpha_k^{[1]}\right\}$ и вычитая из полученных первого равенства второе, с учетом J - самосопряженности оператора L в Π_1, получим $\left(\left\{y_k^{[2]}, \alpha_k^{[2]}\right\}, \left\{y_k \alpha_k\right\}\right)_{\Pi_1} = \left(\left\{y_k^{[1]}, \alpha_k^{[1]}\right\}, \left\{y_k^{[1]}, \alpha_k^{[1]}\right\}\right)_{\Pi_1}$, откуда, в силу (5), следует

$$\left(y_k^{[2]}, y_k\right)_{L_2} - a y_k^{[2]}(l) y_k(l) = \left\| y_k^{[1]} \right\|_2^2 - a\left(y_k^{[1]}(l)\right)^2. \tag{11}$$

На основании (8) имеем

$$F'''(\lambda) = \frac{2}{y^4(l,\lambda)} \left\{ y(l,\lambda) \left[y(l,\lambda) \int_0^l \left(\frac{\partial y(x,\lambda)}{\partial \lambda} \right)^2 dx + \right.\right.$$

$$y(l,\lambda) \int_0^l y(x,\lambda) \frac{\partial^2 y(x,\lambda)}{\partial \lambda^2} dx - \frac{\partial^2 y(l,\lambda)}{\partial \lambda^2} \int_0^l y^2(x,\lambda) dx -$$

$$\left.\left. \frac{\partial y(l,\lambda)}{\partial \lambda} \int_0^l y(x,\lambda) \frac{\partial y(x,\lambda)}{\partial \lambda} dx \right] - 3 \frac{\partial y(l,\lambda)}{\partial \lambda} F''(\lambda) \right\}. \tag{12}$$

Учитывая (11), из (12) получим $\left(y_k^{[2]}, y_k\right)_{L_2} - a y_k^{[2]}(l) y_k(l) = \frac{1}{6} y_k^{[2]}(l) F'''(\lambda_k)$. В силу (1.16) из [7] имеем: $F'''(\lambda_k) \neq 0$. Следовательно, $\beta_k \neq 0$.

Рассмотрим следующие системы корневых функций:

$\left(A_3^1\right)$ $y_1(x), \ldots, y_k(x)$, $y_k^{[1]}(x), y_{k+1}(x), \ldots, y_n(x), \ldots$;

$\left(A_3^2\right)$ $y_1(x), \ldots, y_k(x)$, $y_k^{[2]}(x) + c y_k^{[1]}(x), y_{k+1}(x), \ldots, y_n(x), \ldots$, $c \neq \dfrac{\widetilde{\alpha}_k}{\beta_k y_k(l)}$;

$\left(A_3^3\right)$ $y_1(x), \ldots, y_{k-1}(x), y_k^{[1]}(x), y_k^{[2]}(x) + c y_k(x), y_{k+1}(x), \ldots, y_n(x), \ldots$, $c \neq \dfrac{\nu_k}{\beta_k^2 y_k(l)}$;

$\left(A_3^4\right)$ $y_1(x), \ldots, y_{k-1}(x), y_k(x), y_k^{[1]}(x), y_k^{[2]}(x), y_{k+1}(x), \ldots, y_n(x), \ldots$, $n \neq r$; $r \neq k$.

Теорема 2. Системы корневых функций (A_1), $(A_2^1)-(A_2^3)$, $(A_3^1)-(A_3^4)$ спектральной задачи (1)-(3) минимальны в пространстве $L_p(0,l)$, $1<p<\infty$.

Доказательство. Пользуясь аналогичными рассуждениями, использованными при доказательстве (11), на основании (4), (9) и (10) получим

$$\left(\{y_n,\alpha_n\},\{y_m,\alpha_m\}\right)_{\Pi_1}=0,\ n,m\in\mathbb{N},\ n\neq m;\ \left(\{y_n,\alpha_n\},\left\{y_k^{[1]},\alpha_k^{[1]}\right\}\right)_{\Pi_1}=0,$$

$$n\in\mathbb{N},\ n\neq k;\ \left(\{y_n,\alpha_n\},\left\{y_k^{[2]},\alpha_k^{[2]}\right\}\right)_{\Pi_1}=0,\ n\in\mathbb{N},\ n\neq k,$$

которые эквивалентны следующим равенствам, соответственно

$$(y_n,y_m)_{L_2}=ay_n(l)\overline{y_m(l)},\ n,m\in\mathbb{N},\ n\neq m, \tag{13}$$

$$\left(y_n,y_k^{[1]}\right)_{L_2}=ay_n(l)y_k^{[1]}(l),\ n\in\mathbb{N},\ n\neq k, \tag{14}$$

$$\left(y_n,y_k^{[2]}\right)_{L_2}=ay_n(l)y_k^{[2]}(l),\ n\in\mathbb{N},\ n\neq k. \tag{15}$$

Заметим, что если λ_k – трехкратное собственное значение, то равенство (14) выполняется также при $n=k$.

Если λ_n является простым собственным значением, то в силу (6) $\|y_n\|_2^2-ay_n^2(l)\neq 0$ в случае $\lambda_n\in\mathbb{R}$ и $(y_1,\bar{y}_1)-ay_1^2(l)\neq 0$ в случае $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$. Очевидно, что $\|y_k\|_2^2-ay_k^2(l)=0$ в случаях 2 и 3.

Обозначим:

$$h_n=\left[(y_n,\bar{y}_n)_{L_2}-ay_n^2(l)\right]^{-1},\ n\in\mathbb{N},\ \psi_{n,r}(x)=y_n(x)-\frac{y_n(l)}{y_r(l)}y_r(x),\ n\in\mathbb{N},$$

$$\varphi_k(x)=y_k^{[1]}(l)y_k(x)-y_k(l)y_k^{[1]}(x)$$

Системы (B_1), $(B_2^1)-(B_2^3)$, $(B_3^1)-(B_3^4)$ определим следующим образом:

(B_1) $\upsilon_n(x)=h_n\psi_{n,r}(x),\ n\in\mathbb{N},\ n\neq r$, если $\lambda_n\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$;

$$\upsilon_2(x)=-\frac{y_1(l)}{y_2(l)}h_1\psi_{2,1}(x),\ \upsilon_n(x)=h_n\psi_{n,1}(x),\ n=3,4,\ldots,\ \text{при } r=1,$$

$$\upsilon_1(x)=-\frac{y_2(l)}{y_1(l)}h_2\psi_{1,2}(x),\ \upsilon_n(x)=h_n\psi_{n,2}(x),\ n=3,4,\ldots,\ \text{при } r=2,$$

$\upsilon_1(x)=h_2\psi_{2,r}(x),\ \upsilon_2(x)=h_1\psi_{1,r}(x),\ \upsilon_n(x)=h_n\psi_{n,r}(x)$,

$n=3,4,\ldots,\ n\neq r$, при $r\geq 3$, если $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$.

(B_2^1) $\upsilon_n(x)=h_n\psi_{n,k}(x),\ n=1,2,\ldots,\ n\neq k,\ \upsilon_k(x)=\dfrac{\varphi_k(x)}{b_k}$;

(B_2^2) $\upsilon_n(x)=h_n\left(\psi_{n,k}(x)+\dfrac{b_k y_n(l)}{(a_k-cb_k)y_k(l)}\varphi_k(x)\right),\ n\in\mathbb{N},\ n\neq k$,

$\upsilon_k^{[1]}(x)=\varphi_k(x)/(a_k-cb_k)$;

(B_2^3) $\upsilon_n(x) = h_n\psi_{n,r}(x),\ n \in \mathbb{N},\ n \neq r, k;\ r \neq k, \upsilon_k(x) = b_k^{-2}((cb_k - a_k)\times$

$$\times\, y_k(l)\psi_{k,r}(x) + b_k\varphi_k(x)),\ \ \upsilon_k^{[1]}(x) = -b_k^{-1}y_k(l)\psi_{k,r}(x);$$

(B_3^1) $\upsilon_n(x) = h_n\psi_{n,k}(x), n = 1,2,\ldots, n \neq k$,

$$\upsilon_k(x) = \frac{1}{\beta_k^2 y_k(l)}\left(\tau_k y_k(x) - \gamma_k y_k(l)y_k^{[1]}(x) + \beta_k y_k(l)y_k^{[2]}(x)\right),$$

$$\upsilon_k^{[1]}(x) = \frac{-\varphi_k(x)}{\beta_k y_k(l)};$$

(B_3^2) $\upsilon_n(x) = h_n\left(y_n(x) + \dfrac{y_n(l)}{(\tilde{\alpha}_k - c\beta_k y_k(l))}((\gamma_k + c\beta_k)y_k(x) - \beta_k y_k^{[1]})(x))\right),$

$n = 1,2,\ldots,\ n \neq k,$

$$\upsilon_k(x) = \frac{1}{\beta_k(\alpha_k - c\beta_k y_k(l))}((\sigma_k - c\tau_k)y_k(x) - (\theta_k + c\gamma_k y_k(l))y_k^{[1]}(x) +$$

$$+ (\alpha_k - c\beta_k y_k(l))y_k^{[2]}(x),\ \upsilon_k^{[2]}(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\alpha_k - c\beta_k y_k(l)};$$

(B_3^3) $\upsilon_n(x) = h_n(y_n(x) + \dfrac{y_n(l)}{\nu_k - c\beta_k^2 y_k(l)}((\beta_k\delta_k - \gamma_k^2 + c\beta_k^2)y_k(x) +$

$$+ \beta_k\gamma_k y_k^{[1]}(x) - \beta_k^2 y_k^{[2]}(x)),\ n = 1,2,\ldots,\ n \neq k,$$

$$\upsilon_k^{[1]}(x) = -\frac{1}{\nu_k - c\beta_k^2 y_k(l)}((\sigma_k - c\beta_k y_k^{[1]}(l))y_k(x) -$$

$$-(\theta_k - c\beta_k y_k(l))y_k^{[1]}(x) + \alpha_k y_k^{[2]}(x))$$

(B_3^4) $\upsilon_n(x) = h_n\psi_{n,r}(x),\ n \in \mathbb{N},\ n \neq r, k;\ r \neq k,$

$$\upsilon_k(x) = \frac{1}{\beta_k^3}\left((\gamma_k^2 - \beta_k\gamma_k)y_k(x) - \beta_k\gamma_k y_k^{[1]}(x) + \beta_k^2 y_k^{[2]}(x) - \frac{\nu_k}{y_r(l)}y_r(x)\right),$$

$$\upsilon_k^{[1]}(x) = -\frac{1}{\beta_k^2}\left(\gamma_k y_k(x) - \beta_k y_k^{[1]}(x) + \frac{\alpha_k}{y_r(l)}y_r(x)\right), \nu_k^{[2]}(x) = \frac{\varphi_k(x)}{\beta_k}.$$

Используя (13)-(15) нетрудно убедиться, что системы $(B_1),(B_2^1)-(B_2^3)$, $(B_3^1)-(B_3^4)$ являются сопряженными к системам $(A_1),(A_2^1)-(A_2^3),(A_3^1)-(A_3^4)$, соответственно.

Теорема 2 доказана.

Лемма 2. При $n \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$v_n(x) = l^{-1}y_n(x) + O(1/n). \qquad (16)$$

Доказательство леммы 2 проводится по схеме доказательства леммы 7.1 из [3].

Теорема 3. Системы корневых функций $(A_1),(A_2^1)-(A_2^3),(A_3^1)-(A_3^4)$ образуют базисы в пространстве $L_p(0,l)$, $1<p<\infty$, а в случае $p=2$ –даже базисы Рисса.

Доказательства теоремы 3 проводится по схеме доказательства теоремы 8.1 из [3], с использованием теорем 3.2 из [7], теоремы 2 и леммы 2.

В системах $(A_2^2),(A_3^2),(A_3^3)$ выбор постоянной c является существенным. При $c=a_k/b_k$ система (A_2^2), при $c=\tilde{\alpha}_k/(\beta_k y_k(l))$ система (A_2^3), а при $c=\nu_k/\left(\beta_k^2 y_k(l)\right)$ система (A_3^3) неполны. Действительно, функция $\varphi_k(x)$ ортогональна ко всем функциям систем (A_2^2) и (A_2^3), а функция $w(x)=\tau_k y_k(x)-\gamma_k y_k(l)y_k^{[1]}(x)+\beta_k y_k(l)y_k^{[2]}(x)$ ортогональна ко всем функциям системы (A_3^3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шкаликов А.А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметров в граничных условиях. Тр. сем. им. И.Г. Петровского, 9 (1983),190-229.
2. Руссаковский Е.М. Операторная трактовка граничной задачи со спектральным параметром, полиномиально входящим в граничные условия. Функ. анал. и его прил., 9:4 (1975), 91-92.
3. Керимов Н.В., Алиев З.С. Базисные свойства одной спектральной задачи со спектральным параметров в граничном условии. Матем. сб., 197:10 (2006), 65-86.
4. J.Ben.Amara. Fourth order spectral problem with eigenvalue in the boundary conditions. Nort-Holland Mathematics Studies 197 (2004), 49-58.
5. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой, Наука, М.: 1986.
6. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Критерий полноты и базисности корневых векторов вполне непрерывного J-самосопряженного оператора в пространстве Понтрягина $\Pi_{\aleph}$, Матем. Исслед., 6:1 (1971), 158-161.
7. Aliyev Z.S. Some spectral properties of a fourth order differential operator with spectral parameter in boundary condition. Transactions NAS Azerb., ser. of phys.-techn. and math. scien., 2008, vol. XXVIII, №1, pp. 11-24.
8. Banks D.O., Kurowski G.J. A Prufer transformation for the equation of a vibrating beam subject to axial forces. J. Differential Equations, 24:1 (1977), 57-74.

SƏRHƏD ŞƏRTİNƏ SPEKTRAL PARAMETR DAXİL OLAN DÖRDÜNCÜ TƏRTİB BİR DİFERENSİAL OPERATORUN MƏXSUSİ VƏ QOŞMA FUNKSİYALAR SİSTEMİNİN L_p FƏZASINDA DEFEKT BAZİSLİYİ HAQQINDA

Z.S.ƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə aşağıdakı spektral məsələyə baxılır:

$$y^{(4)}(x)-(q(x)y'(x))' = \lambda y(x),\ x\in(0,l),$$
$$y(0)=y'(0)=y''(l)=0,$$
$$Ty(l)=(a\lambda+b)y(l),$$

burada λ -spektral parametr, $Ty \equiv y''' - qy'$, q- $[0,l]$ parçasında mütləq kəsilməz müsbət funksiya, a,b - həqiqi sabitlərdir, $a>0$.

Baxılan məsələnin məxsusi və qoşma funksiyalar sisteminin $L_p(0,l)$, $1<p<\infty$, fəzasında bazislik xassələri tədqiq edilir.

ON THE DEFECT BASISITY OF THE SYSTEM OF ROOT FUNCTIONS OF A FOURTH ORDER SPECTRAL PROBLEM WITH SPECTRAL PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITIONS

Z.S.ALIYEV

SUMMARY

Consider the spectral problem

$$y^{(4)}(x)-(q(x)y'(x))' = \lambda y(x),\ x\in(0,l),$$
$$y(0)=y'(0)=y''(l)=0,$$
$$Ty(l)=(a\lambda+b)y(l),$$

where λ is a spectral parameter, $Ty \equiv y''' - qy'$, q is positive and absolutely continuous function on $[0,l]$, a,b are real constants, moreover $a>0$.

In this paper investigate the basis properties of the system of root functions of this problem in the space $L_p(0,l)$, $1<p<\infty$.